DOI: 10.5604/01.3001.0014.1155

PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXIII – ZESZYT 2 – 2016

EMIL PANEK[1]

„SILNY" EFEKT MAGISTRALI W MODELU NIESTACJONARNEJ GOSPODARKI GALE'A Z GRANICZNĄ TECHNOLOGIĄ

1. WSTĘP

Ponad pół wieku temu P. A. Samuelson sformułował hipotezę o zbieżności (w długich okresach czasu) optymalnych ścieżek wzrostu gospodarczego do pewnej „wzorcowej" ścieżki (magistrali) charakteryzującej gospodarkę w tzw. równowadze dynamicznej (równowadze von Neumanna), na której gospodarka osiąga maksymalne, równomierne tempo wzrostu[2]. Badania w tym kierunku podjęli ekonomiści matematyczni na całym świecie, a ich efektem jest dzisiaj teoria magistral, z bogatą listą twierdzeń (o magistralach: produkcyjnych, konsumpcyjnych, kapitałowych) w różnych modelach dynamiki ekonomicznej – głównie typu Neumanna-Gale'a-Leontiefa. Modele te odznaczają się swoistą elegancją matematyczną. Z drugiej strony, cechą charakterystyczną większości z nich, którą można jednocześnie uznać za pewną słabość, jest ich stacjonarność.

Artykuł nawiązuje bezpośrednio do pracy Panek (2013a), w której udowodniono tzw. „słabe" oraz „bardzo silne" twierdzenie o magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a ze zmienną technologią, zbieżną do pewnej technologii granicznej. W teorii magistral – w literaturze poświęconej efektowi magistrali w modelach stacjonarnych gospodarek typu input-output z niezmienną (stałą w czasie) technologią – znana jest trzecia tzw. „silna" wersja twierdzeń o magistrali. Wersję takiego twierdzenia w przypadku stacjonarnej gospodarki Gale'a przedstawiono w artykułach Panek (2013b, 2015). Implementując zastosowaną tam technikę dowodzenia poniżej prezentujemy dowód „silnego" twierdzenia o magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a ze zmienną technologią, zmierzającą z czasem do pewnej technologii granicznej. Pod tym względem artykuł różni się od innych znanych autorowi prac z teorii magistral[3].

[1] Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej, Katedra Ekonomii Matematycznej, al. Niepodległości 10, 60-967 Poznań, Polska, e-mail: emil.panek@ue.poznan.pl.

[2] Por. Samuelson (1960), McKenzie (1998).

[3] Zob. m.in. Jensen (2012), Khan, Piazza (2011), Majumdar (2009), McKenzie (2005, 1976), Makarov, Rubinov (1977), Nikaido (1968, rozdz. 4), a także obszerną bibliografię w pracy Panek (2011).

2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

Model niestacjonarnej gospodarki Gale'a z graniczną technologią, którym zajmujemy się dalej, został szczegółowo przedstawiony w pracy Panek (2013a). Przez t oznaczamy skokową zmienną czasu, $t = 0,1,\ldots$. W gospodarce mamy n towarów (zużywanych i/lub wytwarzanych). Przez $x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big) \geqq 0$ oznaczamy wektor towarów zużywanych w okresie t (wektor nakładów lub wektor zużycia produkcyjnego), przez $y(t) = \big(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)\big) \geqq 0$ wektor towarów wytwarzanych w gospodarce w tym okresie (wektor wyników lub wektor produkcji). Jeżeli w gospodarce z wektora nakładów $x(t)$ można wytworzyć wektor produkcji $y(t)$ to o parze $\big(x(t), y(t)\big)$ mówimy, że w okresie t opisuje technologicznie dopuszczalny proces produkcji. Przez $Z(t) \subset R_+^{2n}$ oznaczamy zbiór wszystkich technologicznie dopuszczalnych procesów produkcji[4] w okresie t, $t = 0,1,\ldots$. Zapis $(x, y) \in Z(t)$ (lub $\big(x(t), y(t)\big) \in Z(t)$) oznacza, że w okresie t w gospodarce z (wektora) nakładów x możliwe jest wytworzenie (wektora) produkcji y. Zbiór $Z(t)$ nazywamy przestrzenią produkcyjną gospodarki w okresie t. Przestrzenie produkcyjne $Z(t), t = 0, 1, \ldots$, spełniają następujące warunki[5]:

(G1) $\forall (x^1, y^1), (x^2, y^2) \in Z(t)\ \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\ \big(\lambda_1(x^1, y^1) + \lambda_2(x^2, y^2) \in Z(t)\big)$

(warunek proporcjonalności nakładów i wyników oraz addytywności procesów produkcyjnych).

(G2) $\forall (x, y) \in Z(t)\ (x = 0 \Rightarrow y = 0)$

(warunek „braku rogu obfitości").

(G3) $\forall (x, y) \in Z(t)\ \forall x' \geqq x\ \forall\ 0 \leqq y' \leqq y\ \big((x', y') \in Z(t)\big)$

(możliwość marnotrawstwa nakładów i/lub wyników).

(G4) Przestrzenie produkcyjne $Z(t)$ są zbiorami domkniętymi w R_+^{2n}.

(G5) $Z(t) \subseteq Z(t+1) \subseteq \cdots \subseteq Z$ i Z jest takim najmniejszym zbiorem domkniętym w R_+^{2n} zawierającym wszystkie przestrzenie produkcyjne $Z(t)$, że jeżeli $(x, y) \in Z$ oraz $x = 0$, to $y = 0$ (tj. zachodzi warunek **(G2)**).

Przestrzenie produkcyjne $Z(t)$ spełniające warunki **(G1)–(G4)** nazywamy gale'owskimi. Zbiór Z nazywamy graniczną przestrzenią produkcyjną. Zapis $(x, y) \in Z$

[4] Dopuszczalnych w świetle technologii jaką dysponuje gospodarka w okresie t.

[5] Przestrzenie produkcyjne $Z(t)$ spełniające warunki **(G1)–(G4)** są stożkami domkniętymi w R^{2n} z wierzchołkami w 0. Z ich interpretacją ekonomiczną można zapoznać się w pracach Panek (2003, rozdz. 5, 2013a).

oznacza, że graniczna technologia (której ucieleśnieniem jest graniczna przestrzeń produkcyjna Z) umożliwia wytworzenie wektora produkcji y z wektora nakładów x. Gospodarkę z przestrzeniami produkcyjnymi spełniającymi warunki **(G1)–(G5)** nazywamy niestacjonarną gospodarką Gale’a z graniczną technologią.

□ **Twierdzenie 1**

Graniczna przestrzeń produkcyjna Z (spełniająca warunek **(G5)**) jest gale’owska, tj. spełnia warunki **(G1)–(G4)**.

Dowód. Pokażemy, że graniczna przestrzeń produkcyjna spełnia warunki **(G1)**, **(G3)**. Weźmy dowolne dwa procesy $(x^1, y^1), (x^2, y^2) \in Z$ oraz dowolne liczby $\lambda^1, \lambda^2 \geq 0$. Zgodnie z definicją zbioru Z istnieją ciągi procesów $\left(x^1(t), y^1(t)\right), \left(x^2(t), y^2(t)\right) \in Z(t)$, $t = 0,1,\ldots$, zbieżne (odpowiednio) do (x^1, y^1), (x^2, y^2). Jednocześnie $\left(x(t), y(t)\right) = \lambda_1\left(x^1(t), y^1(t)\right) + \lambda_2\left(x^2(t), y^2(t)\right) \in Z(t)$, czyli $\lim_t\left(x(t), y(t)\right) = \lambda_1(x^1, y^1) + \lambda_2(x^2, y^2) \in Z$. Tym samym spełniony jest warunek **(G1)**.

Podobnie, jeżeli $(x, y) \in Z$, to istnieje ciąg procesów $\left(x(t), y(t)\right) \in Z(t)$, $t = 0,1,\ldots$, zbieżny do (x, y). Niech $x' \geqq x, 0 \leqq y' \leqq y$, $\tilde{x}(t) = x(t) + x' - x$ oraz $\tilde{y}(t) = \max\{0, y(t) + y' - y\} = (\max\{0, y_1(t) + y_1' - y_1\}, \ldots, \max\{0, y_n(t) + y_n' - y_n\})$. Wówczas $\tilde{x}(t) \geqq x(t)$, $0 \leqq \tilde{y}(t) \leqq y(t)$, $\left(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)\right) \in Z(t)$ oraz $\lim_t\left(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)\right) = (x', y') \in Z$ (gdyż przestrzeń produkcyjna Z jest zbiorem domkniętym w R_+^{2n}) i spełniony jest warunek **(G3)**.

Warunki **(G2)**, **(G4)** są spełnione na mocy założenia. ■

3. RÓWNOWAGA VON NEUMANNA W GOSPODARCE GALE’A Z GRANICZNĄ TECHNOLOGIĄ

Ustalmy okres czasu t i weźmy dowolny proces $(x, y) \in Z(t) \setminus \{0\}$. Wtedy, w myśl **(G2)** $x \neq 0$, zatem istnieje nieujemna liczba $\alpha(x, y) = \max\{\alpha |\ \alpha x \leqq y\}$, którą nazywamy wskaźnikiem technologicznej efektywności procesu (x, y). Analogicznie definiujemy wskaźnik technologicznej efektywności nietrywialnego (niezerowego) procesu $(x, y) \in Z \setminus \{0\}$.

□ **Twierdzenie 2**

Przy założeniach **(G1)–(G5):**

(i) funkcja $\alpha\,(\cdot)$ jest ciągła i dodatnio jednorodna na (odpowiednio) $Z(t) \setminus \{0\}$ oraz $Z \setminus \{0\}$,

(ii) istnieją takie procesy $\left(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\right) \in Z(t)$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ oraz takie liczby $\alpha_{M,t}$, α_M, że

$$\alpha_{M,t} = \max_{\substack{(x,y)\in Z(t)\\ (x,y)\neq 0}} \alpha(x, y) = \alpha\left(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\right),\ t = 0,\ 1,\ \ldots,$$

$$\alpha_M = \max_{\substack{(x,y)\in Z\\ (x,y)\neq 0}} \alpha(x, y) = \alpha(\bar{x}, \bar{y}),$$

(iii) $\alpha_{M,0} \leq \alpha_{M,1} \leq \cdots \leq \alpha_M$,

(iv) $\lim_t \alpha_{M,t} = \alpha_M$.

Dowód (i), (ii), (iii) zob. Panek (2003, tw. 5.2) oraz Panek (2013a, tw. 2). W celu udowodnienia (iv) zauważmy, że ciąg $\{\alpha_{M,t}\}_{t=0}^{\infty}$ jest monotonicznie rosnący i ograniczony, więc istnieje $\lim_t \alpha_{M,t} = \bar{\alpha} \leq \alpha_M$. Załóżmy, że $\bar{\alpha} < \alpha_M$. Wówczas

$$\forall t \left(\alpha_{M,t} \leq \alpha_{M,t+1} \ldots \leq \bar{\alpha} < \alpha_M\right). \tag{1}$$

W myśl **(G5)** $\exists\{(x(t), y(t))\}_{t=0}^{\infty} \forall t \left(x(t), y(t)\right) \in Z(t) \wedge \left(\lim_t (x(t), y(t)) = (\bar{x}, \bar{y})\right)$. Funkcja $\alpha(\cdot)$ jest ciągła, więc

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists t_\varepsilon \left(t \geq t_\varepsilon \Rightarrow \alpha_{M,t} \geq \alpha\big(x(t), y(t)\big) > \alpha_M - \varepsilon\right).$$

Biorąc $\varepsilon = \alpha_M - \bar{\alpha} > 0$ dostajemy:

$$\alpha_{M,t} \geq \alpha\big(x(t), y(t)\big) > \bar{\alpha} \text{ dla } t \geq t_\varepsilon,$$

co przeczy (1). ■

Liczby $\alpha_{M,t}$, α_M nazywamy optymalnymi wskaźnikami technologicznej efektywności produkcji (odpowiednio) w niestacjonarnej gospodarce Gale'a w okresie t oraz w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią. Podobnie procesy $\left(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\right)$, $(\bar{x}, \bar{y})$ nazywamy optymalnymi procesami produkcji (odpowiednio) w gospodarce w okresie t oraz w gospodarce z graniczną technologią. Procesy te są określone z dokładnością do struktury (mnożenia przez dowolną liczbę dodatnią).

Dodatkowo zakładamy, że graniczna przestrzeń produkcyjna spełnia następujący warunek, znany w teorii magistral jako tzw. warunek regularności:

(G6) $\exists(\bar{x}, \bar{y}) \in Z(\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M \wedge \bar{y} > 0)$.

Gospodarkę spełniającą ten warunek nazywamy granicznie regularną. Proces $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ nazywamy granicznym optymalnym procesem produkcji. Nietrudno zauważyć, że wobec **(G3)** w granicznie regularnej gospodarce Gale'a

$$\exists(\bar{x}, \bar{y}) \in Z(\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M \bar{x} = \bar{y} > 0). \tag{2}$$

Mówiąc o granicznym optymalnym procesie produkcji wszędzie dalej mamy na myśli proces $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ mający własność (2). O wektorze $\bar{s} = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|} = \frac{\alpha_M \bar{x}}{\|\alpha_M \bar{x}\|} = \frac{\bar{x}}{\|x\|}$

mówimy, że charakteryzuje strukturę produkcji (oraz nakładów) w granicznie optymalnym procesie $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ (tutaj i dalej: $\|x\| = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$). Półprostą

$$N = \{\lambda\bar{s}|\ \lambda > 0\}$$

nazywamy magistralą produkcyjną lub promieniem von Neumanna w niestacjonarnej gospodarce zbieżnej do technologii granicznej.

Niech $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \geq 0$ oznacza wektor cen towarów w gospodarce. Wówczas $\langle p, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i$ przedstawia wartość nakładów, a $\langle p, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i\, y_i$ wartość produkcji w procesie (x, y). Liczbę

$$\beta(x, y, p) = \frac{\langle p,y\rangle}{\langle p,x\rangle},$$

gdzie $\langle p, x\rangle \neq 0$, nazywamy wskaźnikiem ekonomicznej efektywności procesu (x, y) przy cenach p. Jeżeli gospodarka Gale'a jest granicznie regularna, to

$$\exists\bar{p} \geq 0\ \forall\ (x, y) \in Z(\beta(x, y, \bar{p}) \leq \alpha_M) \tag{3}$$

(wszędzie tam gdzie $\langle p, x\rangle \neq 0$) oraz

$$\beta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = \max_{\substack{(x,y)\in Z \\ (x,y)\neq 0}} \beta(x, y, \bar{p}) = \alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M > 0$$

(zob. np. Panek, 2003, tw. 5.3). Wektor $\bar{p}$ nazywamy wektorem cen von Neumanna w gospodarce Gale'a z graniczną technologią. O trójce $\{\alpha_M, (\bar{x}, \bar{y}), \bar{p}\}$ mówimy, że charakteryzuje niestacjonarną gospodarkę Gale'a z graniczną technologią w równowadze von Neumanna[6].

Poniższy warunek zapewnia jednoznaczność magistrali produkcyjnej[7]:

(G7) $\forall(x, y) \in Z\backslash\{0\}(x \notin N \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}) < \alpha_M)$.

Mówi o tym poniższe twierdzenie.

---

[6] W równowadze takiej dochodzi do zrównania efektywności ekonomicznej produkcji z jej efektywnością technologiczną na najwyższym poziomie, jaki przy cenach von Neumanna może osiągnąć niestacjonarna gospodarka z graniczną technologią.

[7] Warunek ten mówi, że efektywność ekonomiczna jakiegokolwiek procesu poza magistralą jest niższa od optymalnej. Można go osłabić, co prowadzi do zastąpienia promienia von Neumanna – półprostej w R^n_{++} – wiązką promieni (magistral). Rośnie wówczas złożoność modelu.

□ **Twierdzenie 3**

W granicznie regularnej gospodarce Gale'a spełniającej warunek **(G7)** magistrala produkcyjna N jest określona jednoznacznie.

Dowód. Załóżmy, że istnieją dwie magistrale:

$$N = \{\lambda\bar{s} | \lambda > 0\}, \; N' = \{\lambda\bar{s}' | \lambda > 0\}.$$

Wówczas $N \cap N' = \emptyset$ oraz:

$$\exists(\bar{x}, \bar{y}) \in Z \left(\bar{x} \in N, \; \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} = \bar{s} \wedge \bar{y} = \alpha_M \bar{x} > 0\right),$$

$$\exists(\bar{x}', \bar{y}') \in Z \left(\bar{x}' \in N', \; \frac{\bar{x}'}{\|\bar{x}'\|} = \bar{s}' \wedge \bar{y}' = \alpha_M \bar{x}' > 0\right),$$

$$\beta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = \frac{\langle\bar{p}, \bar{y}\rangle}{\langle\bar{p}, \bar{x}\rangle} = \beta(\bar{x}', \bar{y}', \bar{p}) = \frac{\langle\bar{p}, \bar{y}'\rangle}{\langle\bar{p}, \bar{x}'\rangle} = \alpha_M.$$

Ponieważ $\bar{x}' \in N'$, więc $\bar{x}' \notin N$. Wtedy z **(G7)** wynika, że $\beta(\bar{x}', \bar{y}', \bar{p}) < \alpha_M$. Otrzymana sprzeczność zamyka dowód. ■

4. DYNAMIKA. TRZY TWIERDZENIA O MAGISTRALI

Ustalmy zbiór okresów czasu $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$, $t_1 < +\infty$. Nazywamy go horyzontem (funkcjonowania) gospodarki. Okres końcowy t_1 wyznacza długość horyzontu T. Weźmy ciąg procesów $\big(x(t), y(t)\big) \in Z(t)$, $t = 0, 1, \dots, t_1$. Gospodarka jest zamknięta w tym sensie, że nakłady w (kolejnym) okresie $t+1$ mogą pochodzić w niej tylko z produkcji wytworzonej w (poprzednim) okresie t:

$$x(t+1) \leqq y(t), \; t = 0, 1, \dots, t_1 - 1.$$

W świetle **(G3)** prowadzi to do warunku:

$$\big(y(t), y(t+1)\big) \in Z(t), \; t = 0, 1, \dots, t_1 - 1. \tag{4}$$

Niech y^0 będzie ustalonym początkowym wektorem produkcji:

$$y(0) = y^0 \geq 0. \tag{5}$$

O ciągu wektorów produkcji $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniającym warunki (4), (5) mówimy, że opisuje (tworzy) (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią. Przy przyjętych założeniach, dla dowolnego początkowego wektora $y^0 \geq 0$ oraz dowolnej długości horyzontu T istnieją (y^0, t_1) – dopuszczalne procesy wzrostu.

Postawmy następujące zadanie maksymalizacji wartości produkcji mierzonej w cenach von Neumanna, wytworzonej w ostatnim okresie t_1 horyzontu T[8]:

$$\max \langle \bar{p}, y(t_1) \rangle$$

$$\text{p.w. (4), (5)} \tag{6}$$

$$\text{(wektor } y^0 \text{ ustalony).}$$

Zadanie to ma rozwiązanie, które oznaczamy przez $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ i nazywamy $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnym procesem wzrostu w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią[9].

We wszystkich twierdzeniach o magistrali prezentowanych dalej ważny jest następujący warunek mówiący o możliwości dojścia gospodarki do magistrali[10]:

(G8) Istnieje taki $(y^0, \check{t}+1)$ – dopuszczalny proces wzrostu $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}+1}$, $\check{t} < t_1$, że

$$\alpha\big(\check{y}\,(\check{t}), \check{y}(\check{t}+1)\big) = \alpha_M.$$

□ **Twierdzenie 4** („Słabe" twierdzenie o magistrali)

Jeżeli niestacjonarna gospodarka Gale'a z graniczną technologią spełnia warunki **(G1)–(G8)**, to $\forall \varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε, że liczba okresów, w których struktura produkcji $s^*(t) = \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|}$ w $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnym procesie wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek

$$\|s^*(t) - \bar{s}\| \geq \varepsilon$$

nie przekracza k_ε. Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu T.

Dowód, Panek (2013a, tw. 4). ■

„Słabe" twierdzenie o magistrali głosi, że optymalne procesy wzrostu „prawie zawsze", za wyjątkiem co najwyżej pewnej – niezależnej od długości horyzontu T –

[8] Jest to, innymi słowy, zadanie wyboru z wiązki wszystkich (y^0, t_1) – dopuszczalnych procesów wzrostu takiego procesu, który w końcowym okresie t_1 prowadzi do maksymalnej wartości produkcji (mierzonej w cenach von Neumanna).

[9] Zob. Panek (2003 rozdz. 5, tw. 5.7), które wprawdzie odnosi się do stacjonarnej gospodarki Gale'a ze stałą technologią, $Z(t) = Z$, $t = 0, 1, \ldots$, ale przytoczony tam dowód w pełni stosuje się także do niestacjonarnej gospodarki ze zmienną technologią.

[10] W twierdzeniu 5 warunek ten spełnia proces optymalny.

skończonej liczby okresów, przebiegają dowolnie blisko (w sensie odległości kątowej) magistrali, którą wyznacza graniczna technologia. Na samej magistrali gospodarka osiąga najwyższe tempo wzrostu.

Szczególną sytuację mamy, gdy proces optymalny w pewnym okresie dociera do magistrali, o czym mówi kolejne twierdzenie.

□ **Twierdzenie 5** („Bardzo silne" twierdzenie o magistrali)

Jeżeli w niestacjonarnej gospodarce Gale'a spełniającej warunki **(G1)–(G8)** $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ prowadzi do magistrali *N*, tj. spełnia warunek $\alpha\big(y^*(\check{t}), y^*(\check{t}+1)\big) = \alpha_M$, to

$$\forall t \in \{\check{t}+1, \dots, t_1 - 1\}(y^*(t) \in N).$$

Dowód, Panek (2013a, tw. 5). ■

Zgodnie z tym twierdzeniem, jeżeli proces optymalny w pewnym okresie osiąga magistralę, to pozostaje na niej wszędzie dalej, za wyjątkiem co najwyżej ostatniego okresu horyzontu *T*.

W następnym „silnym" twierdzeniu o magistrali (twierdzenie 6) pokazujemy, że nawet gdy optymalny proces wzrostu nie dociera do magistrali, jego „wytrącenie" poza ε – otoczenie magistrali może mieć miejsce tylko na początku i/lub pod koniec horyzontu *T*, niezależnie od jego długości (niezależnie od t_1). Przy dowodzie ważną rolę gra warunek **(G9)**, który sformułujemy za chwilę, oraz następujący lemat.

□ **Lemat 1**

Jeżeli zachodzą warunki **(G1)–(G8)**, to

$$\forall s \in S_{++}(1)\ \exists \sigma(s) \in (0,1]\ \forall \delta \in (0, \alpha_M)\ \exists \varepsilon' > 0$$

$$\big(\|s - \bar{s}\| < \varepsilon' \Rightarrow (s, \sigma(s)\alpha_M \bar{s}) \in V(1) \wedge \alpha(s, \sigma(s)\alpha_M \bar{s}) \geq \alpha_M - \delta\big),$$

gdzie: $S_{++}(1) = \{x > 0 |\ \|x\| = 1\}$ oraz $V(1) = \{(x, y) \in Z |\ \|x\| = 1\}$.

Dowód, Panek (2015, lemat 1). ■

Lemat głosi, że jeśli struktura nakładów $s = \frac{x}{\|x\|}$ w procesie $(x, y) \in Z$ jest dostatecznie bliska struktury produkcji $\bar{s}$ na magistrali *N*, to z nakładów tych można wytworzyć produkcję z (technologiczną) efektywnością dowolnie bliską optymalnej efektywności α_M.

W celu sformułowania warunku **(G9)** ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$ i utwórzmy zbiór

$$Z(\varepsilon) = \left\{(x, y) \in Z |\ \left\|\frac{x}{\|x\|} - \bar{s}\right\| \geq \varepsilon\right\}.$$

Przy przyjętych założeniach $Z(\varepsilon)$ jest zbiorem zwartym, a funkcja $\beta(\cdot\,, \overline{p})$ nieujemna i ciągła na $Z(\varepsilon)$ oraz

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists b(\varepsilon) = \max_{(x,y)\in Z(\varepsilon)} \beta(x, y\,, \overline{p}) < \alpha_M,$$

(zob. Panek, 2003, lemat 5.2), czyli biorąc $\delta(\varepsilon) = \alpha_M - b(\varepsilon)$ mamy:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) \in (0, \alpha_M]\ \forall(x, y) \in Z(\varepsilon)\big(\beta(x, y\,, \overline{p}) \leq \alpha_M - \delta(\varepsilon)\big). \tag{7}$$

Funkcja $b(\cdot)$ jest nieujemna i nierosnąca na obszarze określoności oraz $b(\varepsilon) \to \alpha_M$ przy $\varepsilon \to 0$, zatem $\alpha_M \geq \delta(\varepsilon) \to 0$ przy $\varepsilon \to 0$. Podobnie jak w artykule Panek (2013b) zakładamy, że:

(G9) Funkcja $b(\cdot)$ maleje (równoważnie $b(\cdot) = \alpha_M - b(\cdot)$ rośnie) na obszarze określoności[11].

□ **Twierdzenie 6** („Silne” twierdzenie o magistrali)

Weźmy dowolny $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ (rozwiązanie zadania (6). Jeżeli zachodzą warunki **(G1)–(G9)**, to $\forall\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k, że

$$\forall t_1 > \check{t} + 2k\ \forall t \in \{\check{t} + k, \check{t} + k + 1, \dots, t_1 - k\}\left(\left\|\frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|} - \bar{s}\right\| < \varepsilon\right).$$

Dowód[12]. Wybierzmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$. Odpowiada jej liczba $\delta(\varepsilon) \in (0, \alpha_M]$ spełniająca warunek (7). Weźmy liczbę $\delta \in \big(0, \delta(\varepsilon)\big)$ oraz liczbę $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ z lematu, spełniającą warunek $U_{\varepsilon'}(\bar{s}) = \{s \in R^n |\ \|s - \bar{s}\| < \varepsilon'\} \subset R^n_{++}$ (taka liczba istnieje, gdyż $\bar{s} > 0$).

Zgodnie ze „słabym” twierdzeniem o magistrali, istnieje taka liczba naturalna $k_{\varepsilon'}$, że jeżeli $t_1 > k_{\varepsilon'}$, to

$$\left\|\frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|} - \bar{s}\right\| < \varepsilon' \tag{8}$$

co najmniej raz w horyzoncie $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$. Wektor $s^*(t) = \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|}$ w (8) jest oczywiście dodatni. Niech $t_1 > \check{t} + 2k_\varepsilon$, oraz $\tau_1 > \check{t}$ będzie pierwszym (po $\check{t}$), a τ_2 ostatnim okresem horyzontu T, w którym zachodzi warunek (8). Zgodnie z lematem $\left(\frac{y^*(\tau_1)}{\|y^*(\tau_1)\|}, \sigma^*\alpha_M\bar{s}\right) \in V(1)$, lub inaczej

$$(y^*(\tau_1), \rho\sigma^*\alpha_M\bar{s}) \in Z, \tag{9}$$

gdzie $\sigma^* = \sigma\big(s^*(\tau_1)\big)$, $s^*(\tau_1) = \frac{y^*(\tau_1)}{\|y^*(\tau_1)\|} > 0$, $\rho = \|y^*(\tau_1)\| > 0, \tau_1 > \check{t}$.

[11] Efektywność ekonomiczna procesu produkcji maleje w miarę jak struktura nakładów odbiega w nim od optymalnej. Warunek ten zachodzi np. gdy przestrzeń produkcyjna Z jest stożkiem silnie wypukłym.

[12] Dowód wzorowany na dowodzie twierdzenia 3 w pracy Panek (2015).

W myśl **(G8)** istnieje taki $(y^0, \check{t}+1)$ – dopuszczalny proces wzrostu $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}+1}$, $\check{t} < t_1$, że $\check{y}(\check{t}) \in N$ oraz $\alpha\big(\check{y}(\check{t}), \check{y}(\check{t}+1)\big) = \alpha_M$, czyli $\alpha_M \check{y}(\check{t}) = \check{y}(\check{t}+1)$. Ponieważ $\big(\check{y}(\check{t}), \check{y}(\check{t}+1)\big) \in Z(\check{t}+1) \subseteq \cdots \subseteq Z$ oraz $\tau_1 \geq \check{t}+1$, więc

$$\big(\check{y}(\check{t}), \alpha_M \check{y}(\check{t})\big) \in Z(\check{t}+1) \subseteq Z(\tau_1) \subseteq Z(\tau_1+1) \ldots \subseteq Z,$$

czyli

$$(\bar{s}, \alpha_M \bar{s}) \in Z(\tau_1) \subseteq Z(\tau_1+1) \ldots \subseteq Z,$$

gdzie $\bar{s} = \frac{\check{y}(\check{t})}{\|\check{y}(\check{t})\|}$ (gdyż $\check{y}(\check{t}) \in N$). Stąd oraz z (9) wynika, że proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^*(t), & t = 0.1, \ldots, \tau_1 \\ \rho\sigma^* \alpha_M^{t-\tau_1} \bar{s}, & t = \tau_1 + 1, \ldots, t_1 \end{cases}$$

jest (y^0, t_1) – dopuszczalny. Z definicji optymalnego procesu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ otrzymujemy:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \geq \langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1) \rangle = \rho\sigma^* \alpha_M^{t_1-\tau_1} \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle > 0. \tag{10}$$

Niech k' będzie liczbą okresów między τ_1 i τ_2, w których

$$\left\| \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon.$$

Pokażemy, że $k' = 0$. Z (3), (4), (7) otrzymujemy:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq \big(\alpha_M - \delta(\varepsilon')\big)^{t_1-\tau_2} \alpha_M^{\tau_2-\tau_1-k'} \big(\alpha_M - \delta(\varepsilon)\big)^{k'} \langle \bar{p}, y^*(\tau_1) \rangle. \tag{11}$$

Łącząc (10), (11) dochodzimy do nierówności

$$\big(\alpha_M - \delta(\varepsilon')\big)^{t_1-\tau_2} \alpha_M^{\tau_2-\tau_1-k'} \big(\alpha_M - \delta(\varepsilon)\big)^{k'} \langle \bar{p}, y^*(\tau_1) \rangle \geq \rho\sigma^* \alpha_M^{t_1-\tau_1} \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle > 0,$$

czyli:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M} \right)^{k'} \geq \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')} \right)^{t_1-\tau_2} \frac{\rho\sigma^* \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle}{\langle \bar{p}, y^*(\tau_1) \rangle} > 0.$$

Zważywszy że $s^*(\tau_1) = \frac{y^*(\tau_1)}{\|y^*(\tau_1)\|} > 0$, nierówność tę można zapisać inaczej tak:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M} \right)^{k'} \geq \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')} \right)^{t_1-\tau_2} \frac{\sigma^* \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle}{\langle \bar{p}, s^*(\tau_1) \rangle} > 0. \tag{12}$$

Zgodnie z lematem $\alpha = \alpha(s^*(\tau_1), \sigma^* \alpha_M \bar{s}) \geq \alpha_M - \delta$, więc $\alpha\, s^*(\tau_1) \leq \sigma^* \alpha_M \bar{s}$, czyli $(\alpha_M - \delta) s^*(\tau_1) \leq \sigma^* \alpha_M \bar{s}$. Wtedy $\sigma^* \alpha_M \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle \geq (\alpha_M - \delta) \langle \bar{p}, s^*(\tau_1) \rangle > 0$ lub inaczej:

$$\frac{\sigma^*\langle \bar{p}, \bar{s}\rangle}{\langle \bar{p}, s^*(\tau_1)\rangle} \geq \frac{\alpha_M - \delta}{\alpha_M}.$$

Stąd oraz z (12) otrzymujemy:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M}\right)^{k'} \geq \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')}\right)^{t_1 - \tau_2} \frac{\alpha_M - \delta}{\alpha_M} > 0. \tag{13}$$

Ponieważ $0 < \delta(\varepsilon') < \delta(\varepsilon) < \alpha_M$ (gdyż $\varepsilon' < \varepsilon$ i funkcja $\delta(\cdot)$ jest rosnąca, zob. **(G9)** oraz $\delta \in (0, \delta(\varepsilon))$ i $t_1 \geq \tau_2$, z (13) dostajemy:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M}\right)^{k'} > \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')}\right)^{t_1 - \tau_2} \frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M} > 0,$$

czyli:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M}\right)^{k'-1} > 1.$$

Jedyną nieujemną liczbą całkowitą spełniającą ten warunek jest $k' = 0$. W charakterze liczby k, o której mowa w tezie twierdzenia, możemy przyjąć $k = k_{\varepsilon'}$. ■

5. UWAGI KOŃCOWE

Udowodnione „słabe” oraz „silne” twierdzenie o magistrali (twierdzenia 4, 6) pozostają prawdziwe także bez założenia **(G8)**, gdy warunek początkowy (5) zastąpimy silniejszym warunkiem:

$$y(0) = y^0 > 0 \tag{5'}$$

oraz założymy, że graniczny optymalny proces produkcji $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z$ spełnia nie tylko postulat regularności, ale jest także dopuszczalnym procesem w gospodarce Gale’a we wszystkich okresach czasu $t = 0, 1, \ldots$, czyli

$$\forall t \geq 0\big((\bar{x}, \bar{y}) \in Z(t)\big).$$

Łatwo pokazać, że przy takich założeniach warunek **(G8)** jest spełniony dla $\check{t} = 1$. W twierdzeniu 2(iii) zachodzi wtedy oczywiście silniejszy warunek: $\forall t \geq 0\big(\alpha_{M,t} = \alpha_M\big)$.

Wartością dodaną twierdzenia 6 jest fakt, że przy jego dowodzie nie wymaga się stacjonarności gospodarki. Natomiast słabością jest przyjęta, trudna do zweryfikowania, hipoteza o zbieżności technologii produkcji (przy $t \to +\infty$) do pewnej technologii granicznej. Stwarza to interesujące pole dla dalszych badań.

LITERATURA

Jensen M. K., (2012), Global Stability and the "Turnpike" in Optimal Unbounded Growth Models, *Journal of Economic Theory*, 142 (2), 802–832.

Khan M. A., Piazza A., (2011), An Overview of Turnpike Theory: Towards the Disconunted Deterministic Case, *Advanced Mathematical Economics*, 14, 39–68.

Majumdar M., (2009), Equilibrium and Optimality: Some Imprints of David Gale, *Games and Economic Behavior*, 66 (2), 607–626.

Makarov V. L., Rubinov A. M., (1977), *Mathematical Theory of Economic Dynamics and Equilibria*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

McKenzie L. W., (1976), Turnpike Theory, *Econometrica*, 44, 841–866.

McKenzie L. W., (1998), Turnpikes, *American Economic Review*, 88 (2), 1–14.

McKenzie L. W., (2005), Optimal Economic Growth, Turnpike Theorems and Comparative Dynamics, w: Arrow K. J., Intriligator M. D., (red.), *Handbook of Mathematical Economics*, wyd. 2, wol. III, rozdział 26, 1281–1355.

Nikaido H., (1968), *Convex Structures and Economic Theory*, Acad. Press, New York.

Panek E., (2011), O pewnej wersji "słabego" twierdzenia o magistrali w modelu von Neumanna, *Przegląd Statystyczny*, 58 (1–2), 75–87.

Panek E., (2013a), „Słaby" i „bardzo silny" efekt magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią, *Przegląd Statystyczny*, 60 (3), 291–303.

Panek E., (2013b), „Silny" efekt magistrali w modelu dynamiki ekonomicznej typu Gale'a. Zagadnienie wzrostu docelowego, *Przegląd Statystyczny*, 60 (4), 447–460.

Panek E., (2015), „Silny" efekt magistrali w modelu dynamiki ekonomicznej typu Gale'a. Zagadnienie wzrostu docelowego (Autopoprawka), *Przegląd Statystyczny*, 62 (2), 253–257.

Samuelson P. A., (1960), Efficient Path of Capital Accumulation in Terms of the Calculus of Variations, w: Arrow K. J., Karlin S., Suppes P., (red.), *Mathematical Methods in the Social Sciences*, 1959, Proceedings of the first Stanford Symposium, Stanford University Press, Stanford, California, 77–88.

„SILNY" EFEKT MAGISTRALI W MODELU NIESTACJONARNEJ GOSPODARKI GALE'A Z GRANICZNĄ TECHNOLOGIĄ

Streszczenie

W nawiązaniu do pracy Panek (2013a) prezentujemy dowód „silnego" twierdzenia o magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a ze zmienną technologią zbieżną do pewnej technologii granicznej. Przy dowodzie twierdzenia istotną rolę gra założenie, że technologiczna efektywność produkcji w gospodarce maleje w miarę jak struktura produkcji odbiega w niej od struktury optymalnej.

Artykuł wpisuje się w nurt nielicznych prac z ekonomii matematycznej zawierających dowody twierdzeń o magistrali w dynamicznych modelach niestacjonarnych gospodarek typu Neumanna-Gale'a.

Słowa kluczowe: niestacjonarna gospodarka Gale'a z graniczną technologią, ceny von Neumanna, magistrala produkcyjna

“STRONG” TURNPIKE EFFECT IN THE NON-STATIONARY GALE ECONOMY WITH LIMIT TECHNOLOGY

A b s t r a c t

This article, in reference to Panek (2013a) presents proof of the “strong” turnpike theorem in the non-stationary Gale economy with changeable technology convergent to some limit technology. In the proof of the theorem assumption, that production processes efficiency in the economy is the lower the more the investment/input structure in such processes differs the optimum, play significant roles.

The paper is part of trend of few works of mathematical economics containing proofs of the turnpike theorems in the non-stationary dynamic Neumann-Gale economic models.

Keywords: non-stationary Gale-type economy with limit technology, von Neumann prices, production turnpike